

数理统计 概率论与

§ 1.1

1. $A - B = A \cap \bar{B} = A \cup B - B = A - AB$
2. 一般 $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$
3. 优先级: $A \cup B \cap C = A \cup (B \cap C)$, $\cup$ 与 $-$ 优先级相同.
4. 不相容: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B \cap D = \emptyset$
5. $\overline{A \cap B} = A \cup B$, $\overline{A - B} = A - B$

§ 1.2

概率的性质.

1. $P(\emptyset) = 0$

若 $P(A) = 0$ 不能推出 $A = \emptyset$ [~~0~~ $\frac{1}{2}$: A 点在 ± 处, $P(A) = \frac{1}{n} = 0$]

同理, 若 $P(B) = 1$ 不能推出 $B = S$.

2. 设 A, B 为任意两事件, $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

特别地, 当 $A \supset B$ 时, 有 $P(A - B) = P(A) - P(B) \Rightarrow P(A) > P(B) \Rightarrow P(A) \leq P(S) = 1$

3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4. 概率的加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. [不相容: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$]

推广: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

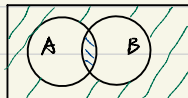
$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n)$$

例1: 已知 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, $P(A) = r$, 求 $P(B)$.

• $P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\overline{\bar{A}\bar{B}}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

$\Rightarrow P(B) = r$

也可由图得 $\underline{P(\bar{A}\bar{B})} + P(A) + P(B) - \underline{P(AB)} = 1$



$$\begin{aligned}
 \text{例2: } P(A\bar{B}\bar{C}) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} P(A\overline{B\cup C}) = P(A - (B\cup C)) = P(A) - P(A(B\cup C)) \\
 &= P(A) - (P(AB) + P(AC) - P(ABC)) \\
 &\stackrel{\textcircled{2}}{=} P(A - B - C) = P(A - B) - P((A - B)C)
 \end{aligned}$$

§1.4 条件概率

1. 定义: A发生的条件下B发生.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0.$$

2. 性质:

- 1). $P(A|C) \geq 0$
- 2). $P(S|C) = 1$
- 3). $P(B|C) = 1 - P(\bar{B}|C)$
- 4). $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$

3. 乘法公式:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$$

$$\Rightarrow P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

例4: 有10把钥匙, 其中2把钥匙能打开一锁, 随机地取一把试开, 若不能打开, 则不放回再取一把试开. 设 A_1, A_2 分别表示第1, 2次能打开该锁, 以下概率:

(1) 第1次能打开 $P(A_1) = 2/10$

(2) 第2次能打开 $P(A_2) = 2/10$ (抽签问题, 第1次不知发生了什么)

✗ < (3) 第1次不能打开情况下第2次能打开 $P(A_2|\bar{A}_1) = 2/9$

(4) 第2次 $\textcircled{1}$ 打开 $P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1) P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{8}{10} * \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$

(5) 2次内打开的概率

$$P(A_1 \cup \bar{A}_1 A_2) \stackrel{\text{不相容}}{=} P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{2}{10} + \frac{8}{45} = \frac{17}{45}$$

$$\text{或 } P(\bar{A}_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} - \frac{2}{10} * \frac{1}{9} = \frac{17}{45}$$

$$P(A) = P(A|B \cup \bar{B}) = P(AB \cup A\bar{B}) \stackrel{\text{不相容}}{=} P(AB) + P(A\bar{B}) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

3. 全概率公式

定义：设 S 为某一随机试验的样本空间， $B_1, \dots, B_n$ 为一组事件，且满足：

(1) $B_i B_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$

(2) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$

则称 $B_1, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分， S 为一个完备事件组。

全概率公式：若 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是 S 的一个划分，则对任一事件 A ：

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j) = \sum_{j=1}^n P(A B_j), j=1, 2, \dots, n.$$

贝叶斯公式(逆概率公式)：若 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是 S 的一个划分，则对任一事件 A ：

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k A)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, k=1, 2, \dots, n.$$

引入先导事件

例8：甲袋中装有10只球，其中7只红球，3只白球，而乙袋中原来是空的，现从甲袋中任取三球放入乙袋，

- (1) 求从乙袋中任取一球是红球的概率；
- (2) 从乙袋中任取一球后，放回，求再取一球是红球的概率；
- (3) 从乙袋中任取一球后，不放回，求再取一球是红球的概率；
- (4) 从乙袋中任取一球是红球，不放回，求再取一球是红球的概率。

解：(1)(2)(3)的答案是一样的，可用全概率公式求解，但注意本题乙袋原是空的，就是说乙袋中红球比例成份同甲袋！所以(1)(2)(3)的答案均为0.7

(4) 设 A_i = “第 i 次从乙袋中取得红球”， $i=1, 2$ $P(A_1) = 0.7$

B_i = “从甲袋中取的3球中有 i 只红球”， $i=0, 1, 2, 3$

$$P(A_1) = \sum_{i=0}^3 P(B_i)P(A_1|B_i) = \frac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3} \times 0 + \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3} \times \frac{1}{3} + \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3} \times \frac{2}{3} + \frac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3} \times 1 = \frac{7}{10}$$

$$P(A_1 A_2) = \sum_{i=0}^3 P(B_i)P(A_1 A_2|B_i) = \frac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3} \times 0 + \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3} \times 0 + \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3} \times 1 = \frac{7}{15}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{2}{3} \quad \text{其实有公式 } P(A_2|A_1) = \sum_{i=0}^3 P(B_i|A_1)P(A_2|B_i, A_1)$$

本小题也可按(1)~(3)方法解：因为甲乙两袋中的红球比例一样的，

所以可以直接从甲袋中考虑： $P(A_2|A_1) = \frac{7-1}{10-1} = \frac{2}{3}$

§ 1.5 独立性

设 A, B 为两随机事件, 当 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ 时, 称事件 A, B 相互独立. 由概率确定, 无关相容.

推论: 1. 当 $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ 时, A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B), P(A|B) = P(A)$

2. A 与 B 相互独立时, A 与 $\bar{B}, \bar{A}$ 与 $B, \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均相互独立.

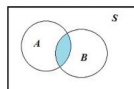
3. 必然事件、不可能事件与任何事件均独立.

4. 若 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 " A 与 B 独立" 和 " A 和 B 不相容" 不会同时成立.

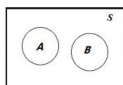
说明:

对 A, B 两个事件, $P(A) > 0, P(B) > 0$

若 A, B 独立, 则两者一定有交集: $P(AB) = P(A)P(B)$



若 A, B 不相容, 则两者一定不独立:



$$0 = P(AB) \neq P(A)P(B)$$

若 A 与 B 有交集, 或 A 与 B 相容, 则 A 与 B 可能独立也可能不独立.



$A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立定义: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个随机事件, 若对 $2 \leq k \leq n$, 均有: $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$



$A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立定义: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个随机事件, 若对 $i \neq j$ 均有: $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$,

注意

1° 两两独立 不能 推出相互独立, 相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立.

2° 相互独立的判断需要检验 $C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - n - 1$ 个等式

3° 实际问题中, 常常不是用定义去验证事件的独立性, 而是由实际情形来判断其独立性.

82

$P(A_1 A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) \cdot P(A_2 | A_3)$ 在相互独立条件下成立, 两两独立时不一定成立.

$$\text{注意: } P(A \cup B) = \begin{cases} P(A) + P(B) - P(AB), & A, B \text{ 为任意事件} \\ P(A) + P(B), & A, B \text{ 为不相容事件} \\ P(A) + P(B) - P(A)P(B), & A, B \text{ 为独立事件} \\ 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}), & A, B \text{ 为独立事件} \end{cases}$$

$$P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B|A), & A, B \text{ 为任意事件} \\ 0, & A, B \text{ 为不相容事件} \\ P(A)P(B), & A, B \text{ 为独立事件} \end{cases}$$

87

例7：甲乙两人比赛射击，每进行一轮，胜者得一分。在一次射击中，甲胜的概率是 a ，乙胜的概率是 $b=1-a$ ，当独立地进行到有一个人超过对方两分时停止，多得两分者为胜，求甲获胜的概率。

合理划分周期.

解2：设 A 表示甲获胜

B_1 ="前两轮比赛甲两次均输", B_2 ="前两轮比赛甲先输后赢"

B_3 ="前两轮比赛甲先赢后输", B_4 ="前两轮比赛甲两次均赢"

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)) = \sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i) \\ &= b^2 * 0 + abP(A|B_2) + abP(A|B_3) + a^2 * 1 \\ &= b^2 * 0 + abP(A) + abP(A) + a^2 * 1 \\ &= 2abP(A) + a^2 \\ \Rightarrow P(A) &= a^2 / (1 - 2ab) \end{aligned}$$

§ 2.1 随机变量

随机变量: 样本空间 S , $X=X(e)$ 为定义在 S 上的实值单值函数, $e \in S$, 称 $X=X(e)$ 为随机变量.

常见分类 $\begin{cases} \text{离散型} \\ \text{连续型} \end{cases}$

§ 2.2 离散型随机变量

随机变量的所有可能取值为有限个或可数个.

性质: 1). $P_k \geq 0, k=1, 2, \dots$

$$2). \sum_{k=1}^{+\infty} P_k = 1$$

1. 0-1 分布 (两点分布)

表示: $\begin{matrix} X & 0 & 1 \\ P & 1-P & P \end{matrix}$ 或 $X \sim B(1, P)$ 或 $X \sim 0-1(P)$ 或 $P\{X=k\} = P^k(1-P)^{1-k}, k=0, 1.$

2. 二项分布

n 重伯努利试验: 在 n 次独立重复试验中, 只有 $A, \bar{A}$, 且 $P(A)=P$ 不变.

X 服从参数为 (n, P) 的二项分布, 记 $X \sim B(n, P)$, $P\{X=k\} = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}, k=0, 1, \dots, n.$

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}$$

例9: 某单位在进货时, 一般从一大批产品中任取10件, 若其中次品数不多于一件, 则接受该批产品. 现有一大批产品其次品率为0.05, 则在以上验收方案下产品能被接受的概率 $P(B)$ 是多少?

分析: 注意到本题的产品数很多, 所以可作近似处理:

1、可以认为抽检时, 产品是一件一件抽取的

2、每取出一件检验后, 又放回

结论: 经以上近似处理后, 可以把抽取10件产品检验看作是做了10次独立试验. 为此, 设 $A =$ "任取一件产品为次品" X 表示10件产品中的次品数, 则 $X \sim B(10, 0.05)$

$$P(B) = P(X=0) + P(X=1) = C_{10}^0 0.05^0 0.95^{10} + C_{10}^1 0.05^1 0.95^9 = 91.39\%$$

	A	B	C
1	100	0.92314328	=HYPGEOM.DIST(1,A1*0.05,10,A1,1)
2	1000	0.91469243	=HYPGEOM.DIST(1,A2*0.05,10,A2,1)
3	10000	0.91394384	=HYPGEOM.DIST(1,A3*0.05,10,A3,1)
4	100000	0.91386985	=HYPGEOM.DIST(1,A4*0.05,10,A4,1)
5	二项分布	0.91386164	=BINOM.DIST(1,10,0.05,1)

26

当产品数很多时, 超几何分布可
看作二项分布.

3. 泊松分布

$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ 且 np 保持适当大小时, 二项分布可近似为泊松分布, $\lambda = np$

$$P\{X=k\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad X \sim P(\lambda)$$

例2: 设 $P(X=1) = P(X=2) = 0.5$, 当 $X=x$ 时, 随机变量 $Y \sim P(x)$, 试求 (1) $P(Y \geq 1)$; (2) $P(X=1 | Y \geq 1)$ 。

解: 注意此处 Y 并非服从泊松分布, 而是有条件服从泊松分布。

可写为: $Y|X=x \sim P(x)$, 把 “ $Y|X=x$ ” 作为随机变量 Z_x 。

$$P(Z_x = k) = \frac{x^k}{k!} e^{-x}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad x=1, 2$$

(1) Y 的取值受到 X 取值的影响, 由全概率公式

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= P(X=1)P(Y \geq 1 | X=1) + P(X=2)P(Y \geq 1 | X=2) \\ &= P(X=1)P(\underline{Z_1} \geq 1) + P(X=2)P(\underline{Z_2} \geq 1) \\ &= P(X=1)(1 - P(Z_1=0)) + P(X=2)(1 - P(Z_2=0)) \\ &= 0.5(1 - e^{-1}) + 0.5(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

33

四、几何分布 (Geometric)

设独立重复试验中, 每次试验有两个结果 $A, \bar{A}$. $P(A) = p$, 随机变量 X 表示直到事件 A 发生为止所做的试验次数, 则

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布。

记为: $X \sim G(p)$

几何分布反映了直到事件 A 发生为止, 所做的试验次数恰为 k 次的概率问题, 也即反映了直到第 k 次才发生事件 A 的概率问题。

39

*五、帕斯卡(负二项)分布 (Pascal)

设独立重复试验中, 每次试验有两个结果 $A, \bar{A}$. $P(A) = p$, 随机变量 X 表示直到事件 A 发生了 r 次为止所做的试验次数, 则

$$P(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k=r, r+1, r+2, \dots,$$

其中 r 为正整数, $0 < p < 1$.

称 X 服从参数为 (r, p) 的帕斯卡分布, $X \sim NB(r, p)$
帕斯卡分布反映了独立试验中直到第 k 次发生了 r 次事件 A 的概率问题。

$$P(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \cdot p$$

42

§ 2.3

概率分布函数.

设 X 为一随机变量, x 为任意实数, 函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$ 称为变量 X 的分布函数.

例2: 设 $X \sim F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.2, & -1 \leq x < 2 \\ 0.7, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$

求 $P(X \leq 3), P(0.5 < X \leq 3), P(X \geq 2), X$ 的分布律

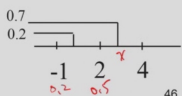
解: $P(X \leq 3) = F(3) = 0.7$

$P(0.5 < X \leq 3) = F(3) - F(0.5) = 0.7 - 0.2 = 0.5$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 2) + P(X = 2)$

$= 1 - F(2) + P(X = 2)$

$= 1 - 0.7 + 0.5 = 0.8$



可以证明:

$P(X = x_0) = P(x_0 + 0) - P(x_0 - 0)$

§ 2.4 连续型随机变量.

对于随机变量 X , 其分布函数为 $F(x)$, 若存在一个非负实值函数 $f(x)$, 使得对任意实数 x , 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

则称 X 为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数.

1. 均匀分布.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

记为 $X \sim U(a, b)$.

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

性质: 设 $a \leq c < c+l \leq b$, $P\{c < X < c+l\} = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}$ 与 c 无关.

2. 指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad X \sim E(\lambda)$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

性质: $X \sim E(\lambda)$, $P\{X > t_0 + t | X > t_0\} = P\{X > t\} \Leftrightarrow P\{X > t_0 + t\} = P\{X > t_0\} \cdot P\{X > t\}$.

“无记忆性”

3. 正态分布 (Gauss分布)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \sigma > 0, \quad f(x) \text{ 不可积.}$$

性质: 1). $f(x)$ 关于 μ 对称.

$$2). \max_{-\infty < x < +\infty} f(x) = f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$3). \lim_{|x-\mu| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

4). μ 为位置参数 (对称轴位置), σ 为尺度参数 (曲线分散性).

标准正态分布: $Z \sim N(0, 1)$ $\mu=0, \sigma=1$

$$\text{密度函数: } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{分布函数: } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1, \quad \Phi(0) = 0.5, \quad \Phi(4) \approx 1$$

一般正态分布: $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 转换为标准正态分布.

$$\Rightarrow P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right).$$

§2.5 随机变量函数的分布.

定理: 设 $X \sim f_X(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $Y = g(X)$, $g'(x) > 0$ 前提: $g(x)$ 单调.

(或 $g'(x) < 0$), 反函数为 $X = h(Y)$, 则:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha = g(-\infty)$, $\beta = g(+\infty)$ {当 $g'(x) < 0$ 时 $\alpha = g(+\infty)$, $\beta = g(-\infty)$ }

定量:

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

定性:

即, 正态分布的随机变量线性变换后正态性不变

例18: 设某纺纱机在任一时间间隔 t (分钟) 内出现的断头次数 $N(t) \sim P(\lambda t)$, 求

(1) 首次断头在10分钟以后出现的概率;

(2) 两次断头之间的间隔时间 Y (分钟) 的概率密度。

解: 泊松分布分布律: $P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(1) P(N(10) = 0) = \frac{(10\lambda)^0 e^{-10\lambda}}{0!} = e^{-10\lambda}$$

$$(2) y > 0, F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) \quad \text{逆向} \quad \text{等价事件}$$

$$= 1 - P(N(y) = 0) = 1 - \frac{(\lambda y)^0 e^{-\lambda y}}{0!} = 1 - e^{-\lambda y}$$

$$\therefore F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Y 服从指数分布!

无记忆性.

例13: $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad Y = X^2$, 求 $f_Y(y)$.

$\because Y = g(X) = X^2$, $y' = g'(x) = 2x$ 虽然 x 在 $(-\infty, \infty)$ 上 $y = g(x)$ 不是单调的, 但是在 $f(x)$ 的非零区间 $(0, 4)$ 上是单调递增的, 故可应用定理的推论。

$$\text{在 } 0 < x < 4 \text{ 上, } x = h(y) = \sqrt{y}, \quad x' = h'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\therefore \text{当 } 0 < y = x^2 < 16 \text{ 时, } f_Y(y) = f_X(h(y)) |h'(y)|$$

$$= f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{8} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & 0 < y < 16 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

§3

二维随机变量

一、联合分布

1. 离散型随机变量

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P_{ij} = P(X=x_i \cap Y=y_j) = P(Y=y_j) \cdot P(X=x_i | Y=y_j)$$

性质: 1) $P_{ij} \geq 0$

$$= P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j | X=x_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} P_{ij} = 1$$

2. 联合分布函数

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

性质: 1) $x=x_0$ 时, $F(x_0, y)$ 关于 y ↑ ...

$$2) 0 \leq F(x, y) \leq 1, F(x_0, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0; F(+\infty, +\infty) = 1$$

3) $F(x, y)$ 关于 x 右连续 ...

$$4) x_2 > x_1, y_2 > y_1 \text{ 时 } F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) = P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \geq 0$$

3. 联合密度函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

$f(x, y)$ 为 (X, Y) 的联合密度函数

性质: 1) $f(x, y) \geq 0$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$$

$$3) \text{ 在 } f(x, y) \text{ 连续点处: } \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$$4) P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

(X, Y) 落在直线或曲线区域上的概率为 0.

二. 边缘分布

1. 离散型随机变量

$$P\{X=x_i\} = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{X=x_i, Y=y_j\}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq p_{i\cdot}$$

$$P\{Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq p_{\cdot j}$$

例：盒子里装有3只红球,2只白球,现分两次从中任取1球,以 X, Y 分别表示取到第1,2次取到的红球数。采用不放回与放回抽样分别求: X, Y 的联合分布律及边缘分布律。

$$\text{解: } X = \begin{cases} 0, \text{第1次取到白球} \\ 1, \text{第1次取到红球} \end{cases}, Y = \begin{cases} 0, \text{第2次取到白球} \\ 1, \text{第2次取到红球} \end{cases}$$

采用不放回抽样

$X \backslash Y$	0	1	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

采用放回抽样

$X \backslash Y$	0	1	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

以上两表中,联合分布律不同,但它们的边缘分布律相同;这就说明了,仅由边缘分布一般不能得到联合分布。

联合分布 $\xrightarrow{\text{确定}}$ 边缘分布; 边缘分布 $\xrightarrow{\text{不能确定}}$ 联合分布

2. 边缘分布函数

$$F_X(x) \triangleq P\{X \leq x\} = P(X \leq x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) \triangleq F(+\infty, y)$$

3. 边缘密度函数

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P(X \leq x, Y < +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$$

$$f_X(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$f_X(x)$ 为 X 的边缘密度函数.

$$f_Y(y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$f_Y(y)$ 为 Y 的边缘密度函数.

三. 条件分布

1. 离散型随机变量

$$P(X=x_i | Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{.j}}$$

$$P(Y=y_j | X=x_i) = \frac{P(Y=y_j, X=x_i)}{P(X=x_i)} = \frac{P_{ji}}{P_{i.}}$$

2. 条件分布函数

离散: $F_{Y|X}(y|x_i) = P(Y \leq y | X=x_i) = \frac{P(Y \leq y, X=x_i)}{P(X=x_i)}$

连续: $F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, u)}{f_X(x)} du$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \begin{matrix} \rightarrow \text{联合} \\ \rightarrow \text{边缘} \end{matrix}$$

二元均匀分布

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{D \text{ 面积}}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例3: 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $\{(x, y): |y| < x < 1\}$ 内均匀

分布, 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 及 $P(X > \frac{2}{3} | Y = \frac{1}{2})$. $\times \frac{P(X > \frac{2}{3}, Y = \frac{1}{2})}{P(Y = \frac{1}{2})}$

解: 由图得, (X, Y) 的概率密度为:



$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

Y 的边缘概率密度为:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{|y|}^1 dx = 1 - |y|, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是给定 y ($-1 < y < 1$), X 的条件概率密度为:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{1-|y|}, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

结论: 二维均匀分布的条件分布仍为均匀分布

$$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由 P76 条件密度函数的性质

$$P(X > \frac{2}{3} | Y = \frac{1}{2})$$

$$= \int_{2/3}^{\infty} f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) dx = \int_{2/3}^1 2 dx + \int_1^{\infty} 0 dx = \frac{2}{3}$$

§ 3.4

X, Y 独立: 任意 x, y , 有 $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$, 即 $F_{X,Y} = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

离散: $p_{ij} = p_i \cdot p_j$, 即 $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$

连续: $f_{X,Y} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 即平面上除去面积为0的区域上处处成立 (若函数连续, 需恒成立).

若两函数独立, 则联合密度函数一定能写成两函数乘积.

定 理 连续量 X 与 Y 独立的充要条件是 $f(x, y)$ 几乎处处可写成 x 函数与 y 函数的乘积, 即 $f(x, y) = m(x)n(y)$.

对于二维正态随机变量 (X, Y) ,

X 与 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$

§ 3.5

一. $Z = X + Y$ 的分布.

$$1. \text{离散: } P(Z = z_k) = P(X + Y = z_k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i, Y = z_k - x_i) \stackrel{\text{独立}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i) P(Y = z_k - x_i) \\ = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = z_k - y_j, Y = y_j) \stackrel{\text{独立}}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = z_k - y_j) P(Y = y_j)$$

$$2. \text{连续: } F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx \stackrel{\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy \stackrel{\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \quad \text{卷积公式.}$$

结论: n 个独立的正态变量的线性组合仍服从正态分布.

例8: 设 $P(X=1)=1/4$, $P(X=2)=3/4$, $Y \sim N(0,1)$,

X, Y 独立, 求 $Z = X + Y$ 的密度函数

→ X 离散, Y 连续

$$\begin{aligned} \text{解: } F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= P(X=1)P(X+Y \leq z | X=1) + \\ &\quad P(X=2)P(X+Y \leq z | X=2) \\ &= 0.25P(Y \leq z-1) + 0.75P(Y \leq z-2) \\ &= 0.25\Phi(z-1) + 0.75\Phi(z-2) \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = 0.25\phi(z-1) + 0.75\phi(z-2)$$

$$= 0.25 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-1)^2}{2}} + 0.75 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-2)^2}{2}}$$

二、 $M = \max\{X, Y\}$, $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

$$F_M(t) = P(\max\{X, Y\} \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t) = F_X(t)F_Y(t)$$

$$F_N(t) = P(\min\{X, Y\} \leq t) = P((X \leq t) \cup (Y \leq t)) = F_X(t) + F_Y(t) - F_{\max}(t)$$

例10: 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从 $U[0, \theta]$, 记

$U = \max(X_1, \dots, X_n)$, $V = \min(X_1, \dots, X_n)$, 求 (U, V) 的密度函数

$$\text{解: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases}$$

$$P(AB) = P(\overline{A\overline{B}}) = P(A - \overline{B}) = P(A) - P(\overline{A\overline{B}}), \quad \text{设 } A = \{U \leq u\}, B = \{V \leq v\}$$

$$F(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) = P(U \leq u) - P(U \leq u, V > v)$$

$$= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u) - P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u, \min(X_1, X_2, \dots, X_n) > v)$$

$$= P(X_1 \leq u, X_2 \leq u, \dots, X_n \leq u) - P(v < X_1, X_2, \dots, X_n \leq u)$$

$$= P(X_1 \leq u)P(X_2 \leq u) \cdots P(X_n \leq u) - P(v < X_1 \leq u)P(v < X_2 \leq u) \cdots P(v < X_n \leq u)$$

$$= [F_X(u)]^n - [F_X(u) - F_X(v)]^n$$

$$\therefore f(u, v) = \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u \partial v} = n(n-1)f_X(u)f_X(v)[F_X(u) - F_X(v)]^{n-2} = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{\theta^n}(u-v)^{n-2}, & 0 \leq v \leq u \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

§4.1

数学期望：离散： $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 前提：级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛
连续： $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 前提： $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛。

1. $X \sim B(n, p)$ $E(X) = np$

2. $X \sim P(\lambda)$ $E(X) = \lambda$

3. $X \sim E(\lambda)$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

4. $X \sim U(a, b)$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$

5. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $E(X) = \mu$

随机变量函数的数学期望

离散： $E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$

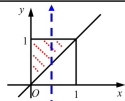
连续： $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$

二维离散： $E(Z) = E(h(X, Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j) p_{ij}$

二维连续： $E(Z) = E(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy$

例5：设 $(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} 15x^2y, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求 $E(XY), E(X)$

解： $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy$
 $= \int_0^1 dx \int_x^1 xy \cdot 15x^2y dy = \frac{15}{28}$



$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 x \cdot 15x^2y dy = \frac{5}{8}$

注：如果为了求 $E(X)$ ，而先求 $f_X(x)$ ，再通过公式

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx$ 计算，是不是更复杂了？

其实， $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx$

例4：设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立且均服从 $N(0, 1)$ ，求 $E(\Phi(\min(X_1, X_2, \dots, X_n)))$ 。

解：记 $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，则 $F_Y(y) = 1 - [1 - \Phi(y)]^n$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = n[1 - \Phi(y)]^{n-1} \phi(y)$

$E(\Phi(\min(X_1, X_2, \dots, X_n))) = E(\Phi(Y))$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y) \cdot f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y) \cdot n[1 - \Phi(y)]^{n-1} \phi(y) dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y) \cdot n[1 - \Phi(y)]^{n-1} d\Phi(y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y) d[1 - \Phi(y)]^n$

$= -\Phi(y)[1 - \Phi(y)]^n \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \Phi(y)]^n d\Phi(y)$

$= 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \Phi(y)]^n d(1 - \Phi(y)) = \frac{1}{n+1}$

例7: 设 X 服从 $U(-1, 2)$, 令 $Y = \max\{X, 0\}$, 求 $E(Y)$ 。

分析: 随机变量 Y 的类型判断。离散 $\sum_{i=1}^{\infty} y_i p_i$, 连续 $\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy$

由 X 的取值不可列无限个, 可知 Y 也是不可列无限个, 所以 Y 不是离散随机变量!

Y 不是离散随机变量, Y 一定是连续随机变量吗?

注意: $P(Y=0) = P(\max\{X, 0\}=0) = P(X \leq 0) = 1/3$

可见 Y 既不是离散随机变量, 也不是连续随机变量!

$$\begin{aligned} \text{解: } E(Y) &= E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, 0) f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 \max(x, 0) \frac{1}{3} dx \quad f(x) = \begin{cases} 1/3, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \int_{-1}^0 0 \cdot \frac{1}{3} dx + \int_0^2 x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3} \quad \leftarrow \text{分段求积分} \end{aligned}$$

注意, 此处没有求 $Y = \max\{X, 0\}$ 的分布!

23

数学期望的性质

1. 设 C 是常数, 则有 $E(C) = C$

2. 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有 $E(CX) = CE(X)$

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

这一性质可以推广到任意有限个随机变量线性组合的情况

$$E(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = E(X_1) \pm E(X_2) \pm \dots \pm E(X_n)$$

$$E(c_1 X_1 \pm c_2 X_2 \pm \dots \pm c_n X_n) = c_1 E(X_1) \pm c_2 E(X_2) \pm \dots \pm c_n E(X_n)$$

将上面三项合起来就是: $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$

注意: 除了独立外, 其他条件也可使上述等式成立。

所以, 虽有 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 但 X, Y 也不一定独立!

这一性质也可以推广到任意有限个随机变量。

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n)$$

例3: 民航送客车载有20位旅客自机场出发, 旅客有10个车站可以下车, 如到达一个车站没有旅客下车就不停车, 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$ 。(设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各旅客是否下车相互独立)

解: 引入随机变量: $X_i = \begin{cases} 0 & \text{第}i\text{站没有人下车} \\ 1 & \text{第}i\text{站有人下车} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, 10$

易知: $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ (各变量同分布, 但不独立)

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = P(\text{第}i\text{站有人下车}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

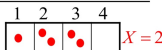
$$\begin{array}{c|cc} X_i & 0 & 1 \\ \hline P_k & \left(\frac{9}{10}\right)^{20} & 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \end{array} \quad \begin{aligned} E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) = 10E(X_1) \\ &= 10[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}] = 8.784(\text{次}) \end{aligned}$$

本题是将 X 分解成几个随机变量之和, 然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和来求数学期望, 这种处理方法具有一定的普遍意义。

31

例5: 设有5只球, 随机地丢入编号为1, 2, 3, 4的四个盒子中, 若某盒落入的球的个数恰好与盒子的编号数相同, 则称为一个配对, 以 X 记配对的个数, 求 $E(X)$ 。

解: X 的取值范围为 0, 1, 2



虽然 X 的取值只有三个, 但其分布律也不容易求得。

设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{盒配对} \\ 0, & \text{第}i\text{盒不配对} \end{cases} \quad i=1, 4 \quad \leftarrow \text{拆分}$

则 $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ (各变量不独立也非同分布)

$$P(X_i = 1) = C_4^1 0.25^1 0.75^{4-1}$$

$$\therefore E(X_i) = P(X_i = 1) = C_4^1 0.25^1 0.75^{4-1}, \quad i=1, 4$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 E(X_i) = \sum_{i=1}^4 C_4^1 0.25^1 0.75^{4-1} = \frac{196}{256}$$

34

§4.2

1. 方差

方差: $E[(X-E(X))^2]$, 记为 $Var(X)$ 或 $D(X)$ 或 $V(X)$

标准差(均方差): $\sqrt{Var(X)}$, 记为 $\sigma(X)$ 或 $SD(X)$. 与 $E(X)$ 同量纲

- 对于离散型随机变量 X , 其分布律为: $P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\dots$

$$Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 p_i$$

- 对于连续型随机变量 X , 其概率密度为 $f(x)$,

$$Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

此外, 利用数学期望的性质, 可得方差的计算公式:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad [E(X)]^2 \text{ 可写成 } E^2(X)$$

2. 方差的性质

1. 设 c 是常数, 则 $Var(c) = 0$
2. 设 X 是随机变量, c 是常数, 则有 $Var(cX) = c^2 Var(X)$
3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$
 - ① 特别, 若 X, Y 相互独立, 则有 $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$
 - ② 进一步推广, 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互(或两两)独立, 则有

$$Var(c_1 X_1 \pm c_2 X_2 \pm \dots \pm c_n X_n) = c_1^2 Var(X_1) + \dots + c_n^2 Var(X_n)$$
 - ③ 综合上述三项, 设 X, Y 相互独立, a, b, c 是常数,
 则 $Var(aX + bY + c) = Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$
4. $Var(X) \leq E((X - c)^2)$, 当且仅当 $E(X) = c$ 时等号成立。
5. $Var(X) = 0 \iff P(X=c)=1$ 且 $c = E(X)$

$$Var(XY) \neq Var(X) \cdot Var(Y)$$

分布类型	分布律/密度函数	数学期望	方差
0-1分布	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布$b(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{1-k}$ $k=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $k=0,1,\dots$	λ	λ
均匀分布$U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases} 1/(b-a), & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < \infty$	μ	σ^2

3. 正态分布处理方法

由前面的卷积公式这一节，知道：

n 个独立的正态变量的线性组合仍服从正态分布，即：

若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad i=1,2,\dots,n$ ，且它们相互独立，则其线性组合：

$$c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

其中 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 是不全为0的常数，两个参数为：

$$\mu = E(c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n) = c_0 + c_1 \mu_1 + \dots + c_n \mu_n,$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n) = c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2 + \dots + c_n^2 \sigma_n^2$$

例： $X \sim N(1,3)$ ， $Y \sim N(2,4)$ ， X, Y 相互独立，则 $P(2X - 3Y < 1) = ?$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = -4$$

$$\text{Var}(2X - 3Y) = 4\text{Var}(X) + 9\text{Var}(Y) = 48 \Rightarrow 2X - 3Y \sim N(-4, 48)$$

$$P(2X - 3Y < 1) = \Phi\left(\frac{1+4}{\sqrt{48}}\right) = \Phi(0.7217) = 0.59$$

§ 4.3

1. 协方差

协方差: $Cov(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

$Var(X) \geq 0$, $Cov(X, Y) \geq 0$ 或 < 0

2. 协方差的性质

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

2. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \xrightarrow{X, Y \text{ 独立}} 0$

3. $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$ a, b 是常数

4. $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$ 分配律.

$Cov(X, X) = Var(X)$

$Cov(c, Y) = E(cY) - E(c)E(Y) = 0$ c 是常数

$Cov(X + Y, X - Y) = Cov(X, X) - Cov(Y, Y) = Var(X) - Var(Y)$

$$Cov(X^*, Y^*) = Cov\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \rho_{XY}$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j)$$

3. 相关系数

相关系数: $E(X^2), E(Y^2)$ 均存在且 $Var(X), Var(Y)$ 非零, $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$

$\rho_{XY} = Cov(X^*, Y^*)$

4. 相关系数的性质

1). 若 X 和 Y 相互独立, 则 $\rho_{XY} = 0$, 但反之不逆.

2). $|\rho_{XY}| \leq 1$

3). $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数 c, a , 使得 $P\{Y = cX + a\} = 1$ 成立.

特别地, 当 $\rho_{XY} = 1$ 时, $c > 0$; 当 $\rho_{XY} = -1$ 时, $c < 0$

相关系数 ρ_{XY} 是一个用来表征 X, Y 之间线性关系紧密程度的量。

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时, 误差较小, 表明 X, Y 线性关系的程度较好;

当 $|\rho_{XY}| = 1$ 时, 误差为0, 表明 X, Y 之间以概率1存在线性关系;

当 $|\rho_{XY}|$ 较小时, 误差较大, 表明 X, Y 线性关系的程度较差;

当 $\rho_{XY} > 0$ 时, 称 X 与 Y 为**正相关**;

当 $\rho_{XY} < 0$ 时, 称 X 与 Y 为**负相关**;

5. 不相关

不相关/零相关: $\rho_{XY} = 0$

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow \textcircled{1} \text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\textcircled{2} E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\textcircled{3} \text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

X 与 Y 相互独立 $\Rightarrow$ X 与 Y 不相关

X 与 Y 相关 $\Rightarrow$ X 与 Y 不独立.

因而二维**正态变量**的分布完全可由 X, Y 各自的均值、方差以及它们的相关系数所确定。

若 (X, Y) 服从二维正态分布,

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$ (前面已证)

$$\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0 \text{ (现在得 } \rho_{XY} = \rho \text{)}$$

$$\Leftrightarrow X \text{ 和 } Y \text{ 不相关 (定义)}$$

即下列任一式子成立, 就可推出 X, Y 独立!

$$\rho_{XY} = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

§ 4.5

n 维正态变量的重要性质

1. n 维正态变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的每一个分量 $X_i, i=1, 2, \dots, n$ 都是正态变量; 反之, 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 都是正态变量, 且相互独立, 则 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 n 维正态变量;
2. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是不全为零 $l_1, l_2, \dots, l_n$ 常数, 均有 $l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_n X_n$ 服从一维正态分布;
3. 若 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 设 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ 是 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的线性函数, 则 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ 也服从多维正态分布; 这一性质称为正态变量的线性变换不变性
4. 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 则 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立的充要条件是 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 两两不相关.

§5.1

1. 依概率收敛

c 常数, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|Y_n - c| \geq \varepsilon\} = 0$, 记为 $Y_n \xrightarrow{P} c, n \rightarrow +\infty$.

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|Y_n - c| < \varepsilon\} = 1$$

性质: 设 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b, n \rightarrow +\infty$, a, b 为常数, $g(x, y)$ 在 (a, b) 连续, 则 $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b), n \rightarrow +\infty$.

2. 切比雪夫不等式

X 的期望与方差存在, 记为 μ 和 σ^2 , $\forall \varepsilon > 0$, 有 $P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

对期望附近的区域内或外的概率给出界的估计.

3. 大数定律

常数序列 $\{c_n, n \geq 1\}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - c_n| \geq \varepsilon\} = 0$, 即 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} c_n$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - c_n| < \varepsilon\} = 1$$

1) 伯努利大数定律

$na \sim B(n, p), \forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|\frac{na}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0$, 即 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{na}{n} \xrightarrow{P} p$

频率 $\xrightarrow{P}$ 概率

2) 辛钦大数定律

不要求方差存在

$E(X_i) = \mu, \forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu| \geq \varepsilon\} = 0$, 即 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$

独立同分布的随机变量序列存在数学期望 $\Rightarrow$ 它们的算术平均依概率收敛到期望.

推论: $h(x)$ 连续, $E(h(X_1)) = a < +\infty$, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \xrightarrow{P} a, n \rightarrow +\infty$

§5.2 中心极限定理

独立同分布情形

$$E(X_i) = \mu, \text{Var}(X_i) = \sigma^2, \forall X \in \mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{近似}} N(0, 1), \text{ } n \text{ 充分大时}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{近似}} N(n\mu, n\sigma^2) = N(E(\sum X_i), \text{Var}(\sum X_i)), \text{ } n \text{ 充分大时}$$

推论: $n \sim B(n, p), \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{n\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$

即 n 充分大时, 二项分布 $B(n, p)$ 可用正态分布 $N(np, np(1-p))$ 来逼近. $n \xrightarrow{\text{近似}} N(np, np(1-p))$

• 二项分布: X_i 发生的概率为 p , Y 为 n 次试验 X 发生的次数, 则 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ($X_i = \begin{cases} 1, & \text{发生} \\ 0, & \text{不发生} \end{cases}$)

$\uparrow$ $E(Y) = np, \text{Var}(Y) = np(1-p)$. n 充分大时, $Y \xrightarrow{\text{近似}} N(E(Y), \text{Var}(Y))$
 Y 表示二项分布

• 若 X_i 独立同分布, 记 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, 则有 $E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = nE(X_1)$

$\uparrow$ $\text{Var}(Y) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) = n\text{Var}(X_1), Y \neq n \cdot X_1$

§ 6.1

统计量：不含任何未知参数的样本的函数。

常用统计量（设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为取自总体 X 的样本）

1. 样本均值： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

2. 样本方差： $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)$

3. 样本标准差： $S = \sqrt{S^2}$

4. 样本 k 阶（原点）矩： $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, (k=1, 2, \dots), A_1 = \bar{X}$

5. 样本 k 阶中心矩： $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, (k=1, 2, \dots), B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 X 的样本，若 $E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$ ，则

$$E(\bar{X}) = E(X) = \mu, \text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}(X)/n = \frac{\sigma^2}{n}, E(S^2) = \text{Var}(X) = \sigma^2, E(B_2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

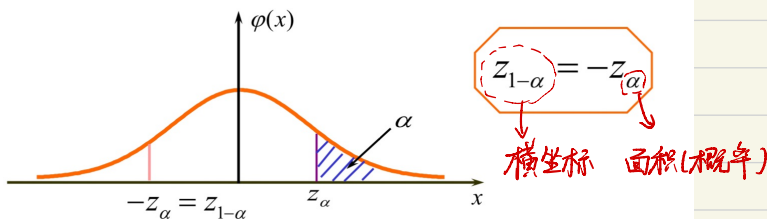
§ 6.2

标准正态分布的上侧 α 分位数 (P127)

162

设 $X \sim N(0,1)$ ，若 z_α 满足条件 $P\{X > z_\alpha\} = \alpha, 0 < \alpha < 1$

则称点 z_α 为标准正态分布的上侧 α 分位数。



$$\Phi(z_\alpha) = P(X \leq z_\alpha) = 1 - P(X > z_\alpha) = 1 - \alpha$$

例：求 $z_{0.1} = ?$

$$\Phi(z_{0.1}) = 1 - 0.1 = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \overset{\text{查表}}{z_{0.1}} = 1.28$$

抽样分布

一、 χ^2 分布 (卡方分布)

$X_i \sim N(0, 1)$, 记 $Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$, 则称 Y 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, $Y \sim \chi^2(n)$

标准正态分布

性质: 1. 可加性: $Y_1 \sim \chi^2(m)$, $Y_2 \sim \chi^2(n)$, $m, n \geq 1$ 且两者相互独立, 则 $Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(m+n)$

2. 期望和方差: $Y \sim \chi^2(n)$, 则 $E(Y) = n$, $\text{Var}(Y) = 2n$

二、 t 分布

$X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, X, Y 独立, 则称随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, $t \sim t(n)$

性质: 1. n 足够大时, t 分布近似于标准正态分布 $N(0, 1)$

2. t 分布密度函数关于 y 轴对称, $t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$

三、 F 分布

$U \sim \chi^2(n_1)$, $V \sim \chi^2(n_2)$, U, V 独立, 则称随机变量 $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从第一自由度为 n_1 , 第二自由度为 n_2 的 F 分布, $F \sim F(n_1, n_2)$

性质: 1. $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

2. $X \sim t(n)$, 则 $X^2 \sim F(1, n)$

3. $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$

§6.3

定理:

1. $X_1, \dots, X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差, 则:

$$1). \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$2). \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

3). $\bar{X}$ 与 S^2 独立.

$$4). \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

2. $X_1, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ 分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的两个相互独立的简单随机样本,

$\bar{X}, \bar{Y}$ 是样本均值, S_1^2, S_2^2 是样本方差, 则:

$$1). \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$2). \text{当 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \text{ 时, } \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

$$\text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

§7.2

一、无偏性准则

$\forall \theta \in \Theta$, 若 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计(量).

$\hat{\theta}$ 的偏差: $E(\hat{\theta}) - \theta$

渐近无偏估计: $\hat{\theta}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$.

二、有效性准则

前提: 无偏

$\forall \theta \in \Theta$, 若 $\text{Var}_\theta(\hat{\theta}_1) \leq \text{Var}_\theta(\hat{\theta}_2)$, 且至少有一个 $\theta \in \Theta$ 使不等号成立, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效

三、均方误差准则

均方误差: $Mse(\hat{\theta}) \triangleq E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$, $\forall \theta \in \Theta$, 若 $Mse(\hat{\theta}_1) \leq Mse(\hat{\theta}_2)$, 且至少有一个 $\theta \in \Theta$ 使不等号成立,

则称在均方误差准则下, $\hat{\theta}_1$ 优于 $\hat{\theta}_2$.

$$Mse(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2] \\ = \underbrace{E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2]}_{\text{Var}(\hat{\theta})} + E[(E(\hat{\theta}) - \theta)^2]$$

四、相合性准则

若 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$, 则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计量

用第五章的定理进行判定.

§7.3, 7.4.

一、置信区间

$$P\{\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U\} \geq 1 - \alpha, \quad \text{置信区间: } (\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$$

置信下限 置信上限

精确度: $E(\hat{\theta}_U - \hat{\theta}_L)$, 误差限: $\pm E(\hat{\theta}_U - \hat{\theta}_L)$

$$P\{\hat{\theta}_L < \theta\} \geq 1 - \alpha, \quad P\{\theta < \hat{\theta}_U\} \geq 1 - \alpha$$

单侧置信下限 单侧置信上限

定理: $P\{\hat{\theta}_L < \theta\} \geq 1 - \alpha_1, P\{\theta < \hat{\theta}_U\} \geq 1 - \alpha_2$

$$\Rightarrow P\{\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U\} = 1 - P\{\theta \leq \hat{\theta}_L\} - P\{\theta \geq \hat{\theta}_U\} \geq 1 - \alpha_1 - \alpha_2$$

二、枢轴量法

1. 单个正态总体: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

1). σ^2 已知, 求 μ 的区间估计: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad -Z_{\alpha/2}, Z_{\alpha/2}$

2). σ^2 未知, 求 μ 的区间估计: $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad -t_{\alpha/2}(n-1), t_{\alpha/2}(n-1)$

3). μ 未知, 求 σ^2 的区间估计: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

2. 两个正态总体: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

1). σ_1^2, σ_2^2 已知, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计: $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$

2). $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计: $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

3). μ_1, μ_2 未知, 求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计: $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1) \quad F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1), F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

$\frac{F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}{1}$

§8.1

检验统计量: 取值大小和原假设 H_0 是否成立有密切联系

拒绝域 W : 拒绝 H_0 的样本值范围. **接受域 $\bar{W}$** : 接受 H_0 的样本值范围.

两类错误

第I类错误 (弃真错误) 概率: $\alpha = P(\text{第I类错误}) = P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 真实})$

第II类错误 (存伪错误) 概率: $\beta = P(\text{第II类错误}) = P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 错误})$

} α, β 相互制约

假设类型

左侧假设: $H_0: \theta \geq \theta_0, H_1: \theta < \theta_0$ 或 $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta < \theta_0$

一般将题目中问的问题作为 H_1 .

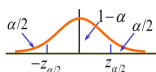
右侧假设: $H_0: \theta \leq \theta_0, H_1: \theta > \theta_0$ 或 $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta > \theta_0$

双侧假设: $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta \neq \theta_0$

三种假设检验的拒绝域

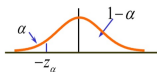
双边假设问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

拒绝域为 $|Z| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2}$



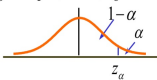
左边假设问题 $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$

拒绝域为 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$



右边假设问题 $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$

拒绝域为 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$



P-值

当原假设 H_0 为真时, 检验统计量取比观察到的结果更为极端的数值的概率.

一般, P 值与显著性水平 α 作比较,

若 $P \leq \alpha$, 则拒绝原假设;

若 $P > \alpha$, 则接受原假设.

拒绝原假设, 称在水平 α 下统计显著;

接受原假设, 称在水平 α 下统计不显著.

§ 8.2, 8.3 参数的假设检验

一、单个正态总体

↓ 检验统计量

1. σ^2 已知, 求 μ 的假设检验 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$, $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ Z 检验

1). 双侧假设

$$\text{拒绝域: } W = \{ |Z| \geq z_{\alpha/2} \}; \quad P\text{-值} = 2P\{Z \geq |z_0|\} = 2[1 - \Phi(|z_0|)]$$

2). 左侧假设

$$W = \{ Z \leq -z_\alpha \}; \quad P\text{-值} = P\{Z \leq z_0\} = \Phi(z_0)$$

3). 右侧假设

$$W = \{ Z \geq z_\alpha \}; \quad P\text{-值} = P\{Z \geq z_0\} = 1 - \Phi(z_0)$$

2. σ^2 未知, 求 μ 的假设检验 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \stackrel{H_0}{\sim} t(n-1)$, $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ t 检验

1). 双侧假设

$$\text{拒绝域: } W = \{ |T| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \}; \quad P\text{-值} = 2P_{H_0}\{t(n-1) \geq |t_0|\}$$

2). 左侧假设

$$W = \{ T \leq -t_\alpha(n-1) \}; \quad P\text{-值} = P\{t(n-1) \leq t_0\}$$

3). 右侧假设

$$W = \{ T \geq t_\alpha(n-1) \}; \quad P\text{-值} = P\{t(n-1) \geq t_0\}$$

3. μ 未知, 求 σ^2 的假设检验 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(n-1)$, $\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ χ^2 检验

1). 双侧假设

$$\text{拒绝域: } W = \{ \chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1) \text{ 或 } \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \};$$

$$P\text{-值} = 2\min\{P(\chi^2(n-1) \leq \chi_0^2), P(\chi^2(n-1) \geq \chi_0^2)\}$$

2). 左侧假设

$$W = \{ \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \}; \quad P\text{-值} = P\{\chi^2(n-1) \leq \chi_0^2\}$$

3). 右侧假设

$$W = \{ \chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1) \}; \quad P\text{-值} = P\{\chi^2(n-1) \geq \chi_0^2\}$$